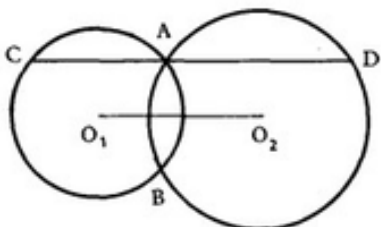


בניית עזר "לא חוקית"

נושא השיעור: משפטי המעגל
כיתה: י'

רמת לימוד: 5 יח"ל
סוג האירוע: שגיאה



המשימה המתמטית

שני מעגלים שמרכזיהם O_1 ו- O_2 נחתכים בנקודות A ו- B .

נתון: $O_1O_2 \parallel CD$.

הוכח: $O_1O_2 = \frac{1}{2}CD$.

תיאור האירוע

התלמידים מבקשים להביא את המשימה שקיבלו לשיעורי הבית למליאה, כדי לפתור יחד עם המורה.

המורה: אוקיי, יש מי שהצליח לפתור ורוצה לבוא להראות לנו על הלוח?

אוריין [ניגשת ללוח, משרטטת]: האמת שזה ממש פשוט ויפה. אני עושה בניית עזר – מחברת ישר דרך הנקודות B ו- C , שעובר דרך הנקודה O_1 . בצד השני אני מחברת ישר דרך הנקודות B ו- D שעובר דרך הנקודה O_2 ונוצר לי משולש BCD . במשולש הזה $BO_1 = CO_1 = R_1$, כי כל אחד מהקטעים הללו היא רדיוס המעגל השמאלי. בנוסף, $BO_2 = DO_2 = R_2$, כי כל אחד מהקטעים הללו הוא רדיוס המעגל הימני. מכאן ש- O_1O_2 הוא קטע אמצעים במשולש BCD , מכיוון שקטע במשולש המחבר אמצע שתי צלעות הוא קטע אמצעים. ידוע שקטע אמצעים שווה למחצית הצלע השלישית כלומר $O_1O_2 = \frac{1}{2}CD$ וזה בדיוק מה שהיינו צריכים להוכיח.

המורה: תודה רבה, אוריין. (לכיתה) מה אתם אומרים? האם הפתרון של אוריין ברור? האם יש שאלות?

התלמידים: כן ברור, באמת פתרון יפה. איך לא חשבנו על זה...

המורה: תודה רבה אוריין על השיתוף, רעיון יצירתי ויפה, מיד נדבר עליו. את יכולה לחזור לשבת.

המורה: האם בניית העזר כאן היא לגיטימית?

רותם: כן, בטח.

גיא: העברנו שני ישרים, כל ישר עובר מנקודה אחת על המעגל לנקודה שנייה על אותו מעגל, דרך מרכז המעגל.

יהלי: נכון, וזה מותר בהחלט!

המורה: הפתרון מתבסס על בניית עזר של המשולש BCD . בחיבור הנקודה B עם הנקודה C נוצרת הצלע BC . האם הצלע הזו עוברת בהכרח דרך הנקודה O_1 ? אולי לא? אותו דבר לגבי הצלע BD , מהחיבור של הנקודות B ו- D . האם הצלע עוברת בהכרח דרך הנקודה O_2 ? שימו לב, דרך שתי נקודות עובר רק ישר אחד, אבל דרך שלוש נקודות, לא בהכרח.

יוסי: אבל המורה, רואים בבירור בסרטוט שכל שלוש הנקודות B, C, O_1 נמצאות על אותו הישר.

המורה: האם ניתן להסתמך על סרטוט כשפותרים בעיה בגאומטריה?

יוסי: אוי, נכון, באמת דיברנו על זה שאי אפשר.

תהל: אז איך נדע מתי אפשר להעביר בניית עזר ומתי לא?

המורה: שאלה טובה. באופן כללי אין מניעה להעביר כל בניית עזר שרוצים, ושנחנו מאמינים שתעזור לנו בפתרון השאלה, בתנאי שלא משתמשים ביותר מאילוץ אחד. בשאלה שלנו למשל אפשר לחבר את BC ואת BD , אבל אי אפשר להניח שהם בהכרח עוברים דרך הנקודות O_1 ו- O_2 . אפשר לשער שזה נכון, אך צריך להוכיח זאת. המורה עוצר, מסתכל על הלוח, וחושב רגע.

המורה: ייתכן בהחלט שבמקרה של השאלה הזו אכן הצלעות BC ו- BD עוברות דרך מרכזי המעגלים, אבל זה משהו שדורש הוכחה, והוא בהחלט לא חלק מבניית העזר שניתן להסתמך עליו. ברור לכם מה הבעיה בפתרון הזה?

תלמידים: כן. אז איך פותרים?

המורה: אוריין, תודה על השיתוף. הרעיון שלך יצירתי ויפה, אבל אי אפשר להסתמך על בניית העזר ולטעון ששלוש נקודות נמצאות בהכרח על הישר. יש עוד מישהו שרוצה לגשת ללוח ולשתף בפתרון שלו?