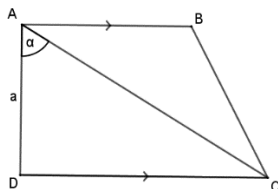


הבעה באמצעות פרמטר – פתרונות שקולים

רמת לימוד: 5 יח"ל
סוג האירוע: עמידה בפני שני טיעונים מתחרים שקולים

נושא השיעור: טריגונומטריה
כיתה: י'



המשימה המתמטית

בטרפז ישר זווית $ABCD$ ($\angle ADC = 90^\circ, AB \parallel CD$) נתון $\angle DAC = \alpha, AD = a, AB = BC$.
הבע בעזרת a ו- α את שטח הטרפז.

תיאור האירוע

היכרות ראשונה עם נושא הפרמטרים בטריגונומטריה. התלמידים עובדים על המשימה בקבוצות, ולאחר מכן דנים במליאה. במהלך התרגול מספר תלמידים פתרו את המשימה כל אחד בדרך שונה והגיעו לתשובות שונות, התלמידים מציגים דרכי פתרונות שונות, שאף אחת מהן לא מופיעה כמו בספר:

$$S_{ABCD} = \frac{\left(\frac{a}{\sin(180 - 2\alpha)} + a \cdot \tan \alpha \right) \cdot a}{2} \quad \text{שני:}$$

$\triangle ADC$

$$\tan \alpha = \frac{DC}{a} \Rightarrow DC = a \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{a}{AC} = \cos \alpha \Rightarrow AC = \frac{a}{\cos \alpha}$$

משפט הסינוסים במשולש $\triangle ABC$

$$\frac{AB}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{AC}{\sin 2\alpha} \Rightarrow AB = \frac{\frac{a}{\cos \alpha} \cdot \sin(90 - \alpha)}{\sin 2\alpha}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{a \cdot \sin(90 - \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot AD}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{\left(\frac{a \cdot \sin(90 - \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha} + a \cdot \tan \alpha \right) \cdot a}{2}$$

התלמידים שמים לב שהתשובות שונות זו מזו, ומזו שבספר.

דן: איך זה שכל אחד מאתנו קיבל פתרון שונה? המתמטיקה לא הגיונית!

המורה בודק ומוצא את שני הפתרונות נכונים. הוא מתכוון להראות לתלמידים איך שתי התשובות זהות באמצעות שימוש ב"זהויות", שהתלמידים מכירים, אבל לא מספיק מפאת קוצר הזמן.

המורה: בדרך של הוכחה על ידי שימוש בזהויות ניתן להראות שבעצם הפתרונות שלכם שקולים זה לזה. אני מזמין אתכם לנסות להוכיח בבית את מה שלא הספקנו בשיעור.

$$S_{ABCD} = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{1 + 2\sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \right)$$

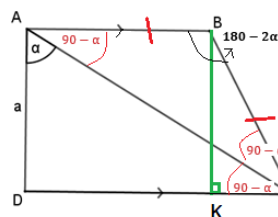
המורה מבקש מדן ושני (לשניהם דרכים שונות בפתרון) להציג את הפתרונות שלהם על הלוח.

דן:

$\triangle ADC$

$$\tan \alpha = \frac{DC}{a} \Rightarrow DC = a \cdot \tan \alpha$$

נעביר גובה BK מהקודקוד B לצלע DC ונשלים את הזוויות בסרטוט, בהתאם לשוויון בין הצלעות AB ו- BC ולפי השוויון בין הזוויות המתחלפות $\angle BAC$ ו- $\angle ACD$:



נתון $AD = BK = a$, לכן:

$\triangle BKC$

$$\sin(180 - 2\alpha) = \frac{a}{BC} \Rightarrow BC = \frac{a}{\sin(180 - 2\alpha)}$$

נתון: $AB = BC$

$$AB = \frac{a}{\sin(180 - 2\alpha)} \quad \text{לכן}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot AD}{2}$$