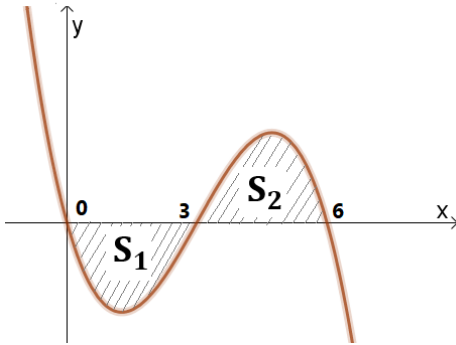


חישוב שטח מעל או מתחת לציר ה- X

רמת לימוד: 5 יח"ל
סוג האירוע: שגיאה

נושא השיעור: חשבון אינטגרלי – חישובי שטחים
כיתה: יא'

המשימה המתמטית



בסרטוט מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x$.

הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(0,0)$, $(3,0)$, $(6,0)$.

א. הוכח: $\int_0^6 f(x) dx = 0$.

ב. היעזר בנתונים ובסעיף א' והוכח: $S_1 = S_2$.

שצריך לחשב אותו בשני חלקים: את החלק שנמצא בתחום שבין 0 ל-3 והחלק השני בתחום בין 3 ל-6. מה ניתן להסיק מהעובדה שהאינטגרל שחישבנו שווה ל-0?

התלמידים מסייעים זה לזה בהוכחה ומגיעים למסקנה שהשטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה:

השטח S_1 נמצא כולו מתחת לציר ה- x ולכן שווה לערך המוחלט של האינטגרל בין הגבולות 0 ו-3.

$$S_1 = \left| \int_0^3 f(x) dx \right|$$

$$\int_0^6 f(x) dx = 0 \text{ לפי סעיף א'}$$

ולכן

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = -$$

$$S_1 + S_2 = 0.$$

$$S_1 = S_2 \text{ כלומר}$$

תיאור האירוע

לאחר שתרגלו שאלות של חישובי שטחים בהן הגרף נמצא כולו מעל ציר ה- x או כולו מתחת לציר ה- x , בשיעורים קודמים, המורה מציגה את המשימה על הלוח. שלמה מציע לפתור.

שלמה: השטח המקווקו שווה לאינטגרל בין הגבולות 0 ו-6

$$\begin{aligned} \int_0^6 (-x^3 + 9x^2 - 18x) dx &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{9x^3}{3} - \frac{18x^2}{2} \right]_0^6 \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + 3x^3 - 9x^2 \right]_0^6 = (0) - (0) = 0. \end{aligned}$$

המורה: קיבלנו שערך האינטגרל המסוים הוא 0, מה אתם אומרים?

דני: שטח לא יכול להיות אפס.

אורטל: אי אפשר לחשב את גרף הפונקציה שנמצא מתחת לציר ה- x כמו שמחשבים שטח שנמצא מעל לציר ה- x , אחרת יוצא שהשטח שלילי. השטח הנכון הוא הערך המוחלט של האינטגרל בגבולות המתאימים.

אביב: אבל שטח לא יכול להיות שלילי!

ניצן: החלק מהשטח שנמצא מעל ציר ה- x הוא חיובי. אבל החלק שנמצא מתחת לציר ה- x מביא לתוצאה שלילית בחישוב ערך האינטגרל המסוים. לכן צריך לחשב את השטח המבוקש כערך המוחלט של האינטגרל בין הגבולות 0 ו-3.

המורה: האינטגרל שחישבנו אינו מייצג את השטח. שטח כזה לא ניתן לחשב בעזרת אינטגרל יחיד, משום