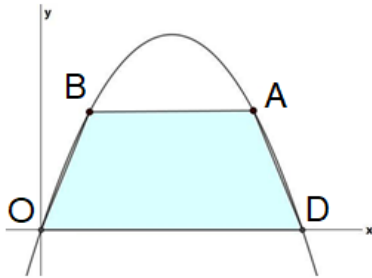


פתרון בעיות קיצון בגרפים באמצעות תכונות של סימטריה

רמת לימוד: 5 יח"ל
סוג האירוע: פתרון מקורי

נושא השיעור: בעיות קיצון
כיתה: י'



המשימה המתמטית

בתוך פרבולה שמשוואתה $y = 6x - x^2$ חוסמים טרפז $ABOD$ כמתואר בסרטוט.
מכל הטרפזים השונים שניתן לחסום באופן הזה, מצא את שטחו של הטרפז בעל השטח המקסימלי.

פתרונות נוספים למשימה

פתרון באמצעות השלמה לריבוע:

לפי הפתרון הקודם, שיעורי הנקודה A הם $A(t, 6t - t^2)$, ושיעור ה y של נקודה B הוא $y_B = 6t - t^2$.

נציב את y_B בפונקציה הנתונה על מנת להביע את שיעור ה x של נקודה B באמצעות הפרמטר t:

$$\begin{aligned} 6x - x^2 &= 6t - t^2 \\ x^2 - 6x &= t^2 - 6t \quad (\text{כפל במינוס 1}) \\ (x - 3)^2 - 9 &= (t - 3)^2 - 9 \\ (x - 3)^2 &= (t - 3)^2 \\ \text{לאחר הוצאת שורש משני האגפים:} \end{aligned}$$

פתרון ראשון:

$$\begin{aligned} x - 3 &= t - 3 \\ x &= t \quad (\text{שיעור ה x של נקודה A}) \end{aligned}$$

פתרון שני:

$$\begin{aligned} x - 3 &= -(t - 3) \\ x - 3 &= -t + 3 \\ \text{לכן שיעור האיקס של נקודה B הוא } x_B &= 6 - t. \end{aligned}$$

פתרון באמצעות הנוסחה להפרש ריבועים:

נסמן בפרמטר t את שיעור ה x של נקודה A ונביע באמצעות t את שיעור ה y של נקודה A, על ידי שניב בפונקציה הנתונה: $x = t$.

$$\begin{aligned} f(t) &= 6t - t^2 \quad \text{לכן שיעורי הנקודה A הם} \\ &A(t, 6t - t^2) \end{aligned}$$

שיעור ה y של נקודה B זהה לשיעור ה y של נקודה A (כיוון שהצלע AB מקבילה לציר ה x), ולכן $y_B = 6t - t^2$.

נציב את y_B בפונקציה הנתונה על מנת להביע את שיעור ה x של נקודה B באמצעות הפרמטר t:

$$\begin{aligned} 6x - x^2 &= 6t - t^2 \\ t^2 - x^2 &= 6t - 6x \quad (\text{העברת אגפים}) \end{aligned}$$

$$6(t - x) = (x - t)(x + t) \quad (\text{נוסחת הפרש ריבועים ופירוק לגורמים})$$

נוכל לחלק את שני אגפי המשוואה ב $(t - x)$, (האות x מבטאת שיעור ה x של נקודה B, והאות t מבטאת את שיעור האיקס של נקודה A). ולצמצם משום שמדובר באורך קטע בטרפז (הביטוי לא שווה 0), ונקבל:

$$t + x = 6$$

לכן שיעור האיקס של נקודה B הוא $x_B = 6 - t$.